

**Cours des nombres complexes**

**I) Présentation des nombres complexes**

**Définition :**

On appelle nombre complexe tout nombre de la forme  $z = x + iy$  où  $x$  et  $y$  sont des nombres réels et  $i$  un nombre imaginaire vérifiant  $i^2 = -1$ . On note  $\mathbb{C}$  l'ensemble des nombres complexes.

L'écriture  $z = x + iy$  est appelé la forme algébrique de  $z$ .  $x$  est la partie réelle de  $z$  et on note  $x = \text{Re}(z)$ .

$y$  est la partie imaginaire de  $z$  et on note  $y = \text{Im}(z)$ .

Exemple :  $z = 2 - 5i = 2 + (-5)i$ .  $\text{Re}(z) = 2$  et  $\text{Im}(z) = -5$ . Si

$x = \text{Re}(z) = 0$  on dit que  $z$  est réel ( $z \in \mathbb{R}$ ).

Si  $y = \text{Im}(z) = 0$  on dit que  $z$  est imaginaire pur ( $z \in i\mathbb{R}$ ).

Deux nombres complexes  $z = x + iy$  et  $z' = x' + iy'$

Sont égaux si et seulement si  $\begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$

$z = x + iy = 0 \Leftrightarrow x = 0$  et  $y = 0$ .

**Calcul dans  $\mathbb{C}$  :**

l'ensemble des nombres complexes est muni de l'addition et de la multiplication et utilise les mêmes règles de calcul dans  $\mathbb{R}$  en remplaçant chaque  $i^2$  par  $-1$  et en distinguant les parties réelles et imaginaires.

Exemples :

Soient  $z = x + iy$  et  $z' = x' + iy'$

$z + z' = x + x' + i(y + y')$ .

$z - z' = x - x' + i(y - y')$ .

$z \times z' = xx' - yy' + i(xy' + yx')$ .

$(x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$

$(x - iy)^2 = x^2 - y^2 - 2ixy$

$(x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$ .

**Application :**

1°) On donne :  $z_1 = 2 + 3i$  ;  $z_2 = -4 + 5i$  et  $z_3 = 5 - 3i$ .

Mettre sous forme algébrique les nombres suivants :  $z_1 + z_2$  ;  $3z_1 - 4z_2$  ;  $z_1z_2z_3$  ;  $z_1^2$  ;  $z_2^3$ .

2°) Vérifier que  $3i$  est une racine de  $p(z) = z^3 + (1 - 8i)z^2 - (23 + 4i)z - 3 + 24i$

**Réponse:**

$$z_1 + z_2 = 2 + 3i + (-4 + 5i) = 2 + 3i - 4 + 5i = 2 - 4 + (3 + 5)i = -2 + 8i$$

$$3z_1 - 4z_2 = 3(2 + 3i) - 4(-4 + 5i) = 6 + 9i + 16 - 20i = 6 + 16 + (9 - 20)i = 22 - 11i$$

$$z_1z_2z_3 = (2 + 3i)(-4 + 5i)(5 - 3i) = (-8 + 10i - 12i - 15)(5 - 3i) = (-23 - 2i)(5 - 3i) = -115 + 69i - 10i - 6 = -121 + 59i$$

$$z_1^2 = (2 + 3i)^2 = 2^2 + 2 \times 3i + (3i)^2 = 4 + 6i - 9 = -5 + 6i$$

$$z_2^3 = (-4 + 5i)^3 = (-4 + 5i)(-4 + 5i)^2 = (-4 + 5i)((-4)^2 + 2 \times (-4) \times 5 + (5i)^2) = (-4 + 5i)(16 - 40i - 25) = (-4 + 5i)(-9 - 40i) = 36 + 160i - 45i + 200 = 236 + 115i$$

2°) Vérifions que  $3i$  est une racine de  $p(z)$  c'est-à-dire que  $p(3i) = 0$

On a  $p(z) = z^3 + (1 - 8i)z^2 - (23 + 4i)z - 3 + 24i$  Donc

$$p(3i) = (3i)^3 + (1 - 8i)(3i)^2 - (23 + 4i)(3i) - 3 + 24i = -27i - 9 + 72i - 69i + 12 - 3 + 24i = -12 + 12 + 96i - 96i = 0. \text{ Donc } 3 \text{ est une racine de } p(z)$$

## 2) Représentation des nombres complexes :

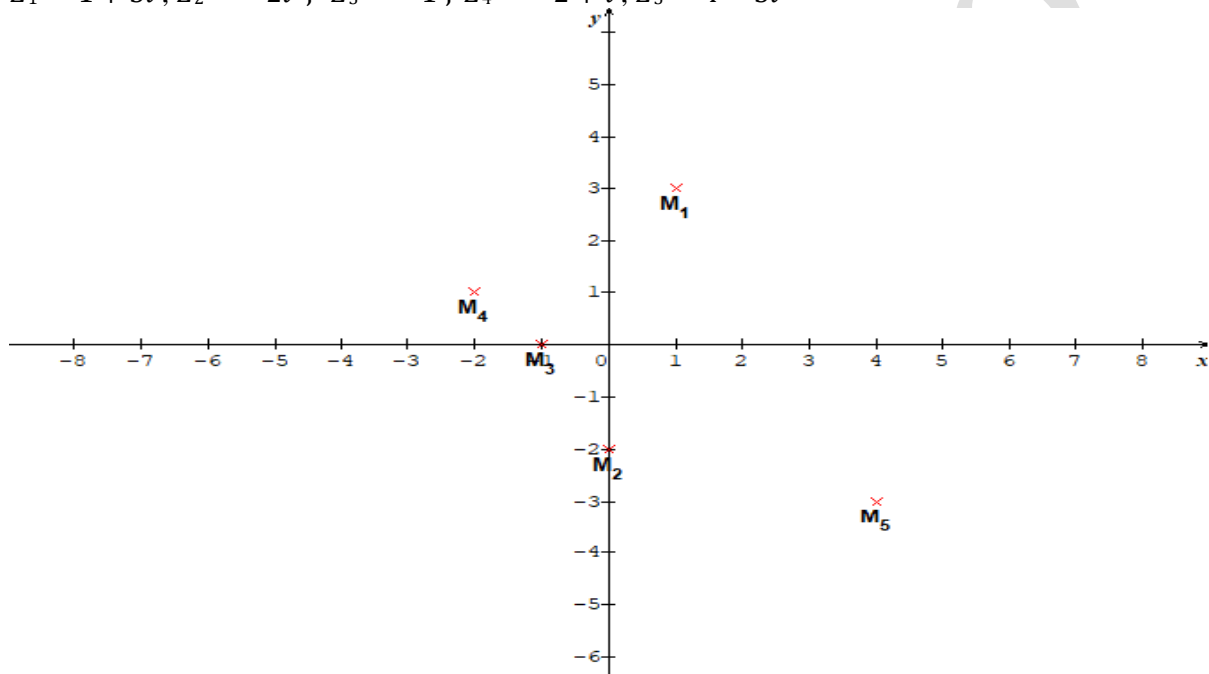
a) Le plan complexe  $\mathbb{C}$  est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  à tout complexe  $z = x + iy$  /  $x, y \in \mathbb{R}$  on associe le point  $M(x, y)$  du plan.

- $M$  est l'image de  $z$
- $z$  est l'afixe de  $M$ .

**Exemple :**

Placer les point  $M_i$  d'affixe  $Z_i$  avec  $1 \leq i \leq 5$

$$Z_1 = 1 + 3i; Z_2 = -2i; Z_3 = -1; Z_4 = -2 + i; Z_5 = 4 - 3i$$



$$Z_1 = 1 + 3i \Rightarrow M_1(1; 3); Z_2 = -2i \Rightarrow M_2(0; -2); Z_3 = -1 \Rightarrow M_3(-1; 0);$$

$$Z_4 = -2 + i \Rightarrow M_4(-2; 1); Z_5 = 4 - 3i \Rightarrow M_5(4; -3);$$

### b) Affixes des vecteurs

Soit  $A$  le point d'affixe  $Z_A$  et  $B$  le point d'affixe  $Z_B$  alors l'affixe du vecteur  $\vec{AB}$  est le nombre  $Z_B - Z_A$ .

$$Z_{\vec{M_1M_2}} = Z_2 - Z_1 = -2i - (1 + 3i) = -1 - 5i$$

#### ■ Affixe du milieu :

Soit  $I$  le milieu du segment  $[AB]$  on a :  $Z_I = \frac{Z_A + Z_B}{2}$

#### ■ Affixe du centre de gravité $G$ du triangle $ABC$

$$\text{On a : } Z_G = \frac{Z_A + Z_B + Z_C}{3}$$

### Application :

Le plan complexe  $\mathbb{C}$  est muni d'un repère orthonormé.  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  On donne les points A, B et C d'affixes respectives  $a = 2 + 3i$ ;  $b = -1 + i$  et  $c = -3i$ .

- Placer ces points sur une figure
- Déterminer les affixes des points suivants :

- D tel que ABDC soit un parallélogramme.
- I le milieu du segment [AB].
- E symétrique de A par rapport le point B.
- G centre de gravité du triangle ABC

### Réponse:

#### b) L'affixe de D :

Si ABCD est un parallélogramme alors

$$\vec{AD} = \vec{BC} \Leftrightarrow z_{AD} = z_{BC} \Leftrightarrow z_D - z_A = z_C - z_B \Leftrightarrow z_D = z_C - z_B + z_A \Leftrightarrow$$

$$z_D = -3i + 1 - i + 2 + 3i = 3 - i$$

$$\text{L'affixe de I : } z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{2 + 3i - 1 + i}{2} = \frac{1 + 4i}{2} = \frac{1}{2} + 2i$$

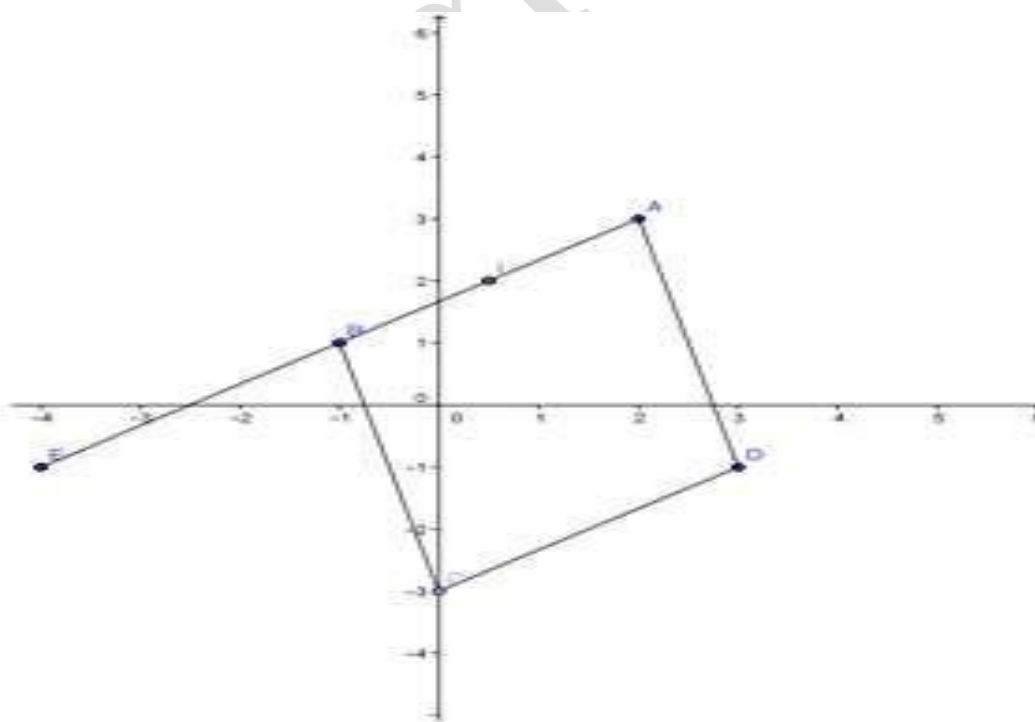
$$\text{L'affixe de G : } z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} = \frac{2 + 3i - 1 + i - 3i}{3} = \frac{1 + i}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}i$$

L'affixe de E : Si E est le symétrique de A par rapport à B alors B est le milieu du segment [AE] et par conséquent :

$$z_B = \frac{z_A + z_E}{2} \Rightarrow z_A + z_E = 2z_B \Rightarrow z_E = 2z_B - z_A = 2(-1 + i) - 2 - 3i$$

$$= -2 + 2i - 2 - 3i = -4 - i$$

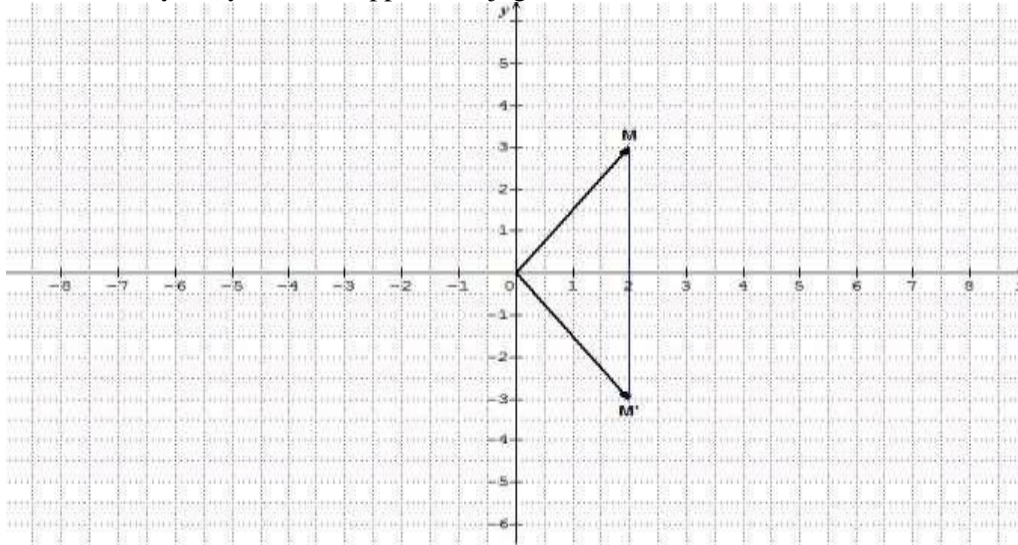
a)



## Conjugué d'un complexe

### a) Définition

Soit  $z = x + iy$  /  $x, y \in \mathbb{R}$ , on appelle conjugué de  $z$  et on le note  $\bar{z}$ , le nombre  $\bar{z} = x - iy$ .



4/14

### Exemples :

$$z = 2 + 3i \Rightarrow \bar{z} = 2 - 3i$$

$$z = 1 - i \Rightarrow \bar{z} = 1 + i$$

$$z = 2i - 1 \Rightarrow \bar{z} = -2i - 1$$

$$z = 4 \Rightarrow \bar{z} = 4 \quad ; \quad z = 3i \Rightarrow \bar{z} = -3i$$

Remarque : Les points  $M(z)$  et  $M'(\bar{z})$  sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

$$z = x + iy \text{ et } \bar{z} = x - iy$$

$$M'(\bar{z}) = S_{(Ox)}(M(z))$$

### Propriétés :

Pour tout  $z, z' \in \mathbb{C}$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  on a :

$$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$$

$$\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}'$$

$$\frac{\bar{z}}{\bar{z}'} = \frac{z}{z'} \quad , \quad (z' \neq 0)$$

$$\overline{z^n} = (\bar{z})^n$$

$z$  est un réel si et seulement si  $\bar{z} = z$

$z$  est imaginaire pur si et seulement si  $\bar{z} = -z$

$$\text{Si } z = x + iy \text{ on a } x = \frac{z + \bar{z}}{2} \text{ et } y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

$$z \times \bar{z} = x^2 + y^2$$

### Exemple :

Ecrire sous la forme algébrique chacun des nombres complexes suivants :

$$z_1 = \frac{1}{1-i} ; z_2 = \frac{3}{2+i} ; z_3 = \frac{3+2i}{i} ; z_4 = \frac{1}{2+3i} - \frac{1}{2-3i}$$

### Réponse:

$$z_1 = \frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+i}{1^2+1^2} = \frac{1+i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$z_2 = \frac{3+i}{2+i} = \frac{(3+i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{6-3i+2i+1}{2^2+1^2} = \frac{7-i}{5} = \frac{7}{5} - \frac{1}{5}i ; z_3 = \frac{3+2i}{i} = \frac{(3+2i)(-i)}{i \times (-i)} = \frac{-3i+2}{1} = 2 - 3i$$

$$z_4 = \frac{1}{2+3i} - \frac{1}{2-3i} = \frac{2-3i-2-3i}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{-6i}{2^2+3^2} = \frac{-6i}{13}$$

Remarque :

$$i^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 4k \\ i & \text{si } n = 4k + 1 \\ -1 & \text{si } n = 4k + 2 \\ -i & \text{si } n = 4k + 3 \end{cases}$$

Exemple : Calculer  $i^{100}$  ;  $i^{2541}$  ;  $i^{2022}$  ;  $i^{2011}$ .

$$S = 1 + i + i^2 + i^3 + \dots + i^{2021}$$

Réponse:  $i^{100} = i^{4 \times 25} = (i^4)^{25} = 1^{25} = 1$  ;  $i^{2541} = i^{4 \times 635 + 1} = (i^4)^{635} \times i = 1^{635} \times i = i$

$$i^{2002} = i^{4 \times 505 + 2} = (i^4)^{505} \times i^2 = 1 \times -1 = -1$$
 ;

$$S = 1 + i + i^2 + i^3 + \dots + i^{2021} = \frac{1 - i^{2022}}{1 - i} = \frac{1 - (-1)}{1 - i} = \frac{2}{1 - i} = \frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2+2i}{1^2+1^2} = \frac{2+2i}{2} = 1 + i$$

5/14

## II) La forme trigonométrique et exponentielle

### 1) Le module

Soit  $Z = x + iy$  /  $x, y \in \mathbb{R}$ .

On appelle module de  $Z$  et on le note  $|Z|$  le nombre réel positif  $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{Z\bar{Z}}$ .

Exemples :  $Z = 3+4i$ ,  $|Z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$  ;

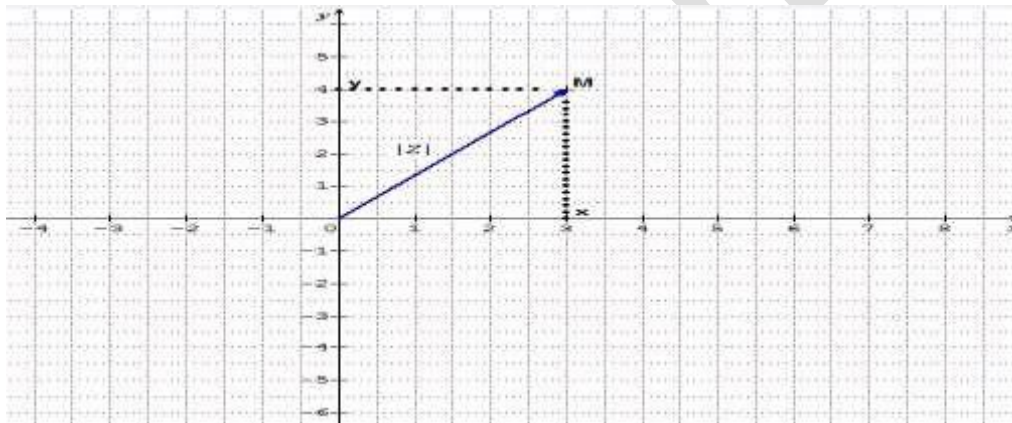
$Z = 1+i$ ,  $|Z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$  ;

$Z = 2$ ,  $|Z| = 2$  ;  $Z = -i$ ,  $|Z| = 1$ .

### Interprétation géométrique :

Soit  $Z = x + iy$  /  $x, y \in \mathbb{R}$ .

$M(x, y)$  est l'image de  $Z$  dans un R.O dans un repère orthonormé  $(O ; \vec{u}, \vec{v})$



$$OM = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |Z|$$

De façon générale  $MN = |Z_M - Z_N| = |Z_N - Z_M|$ .

$$AB = |Z_B - Z_A|$$

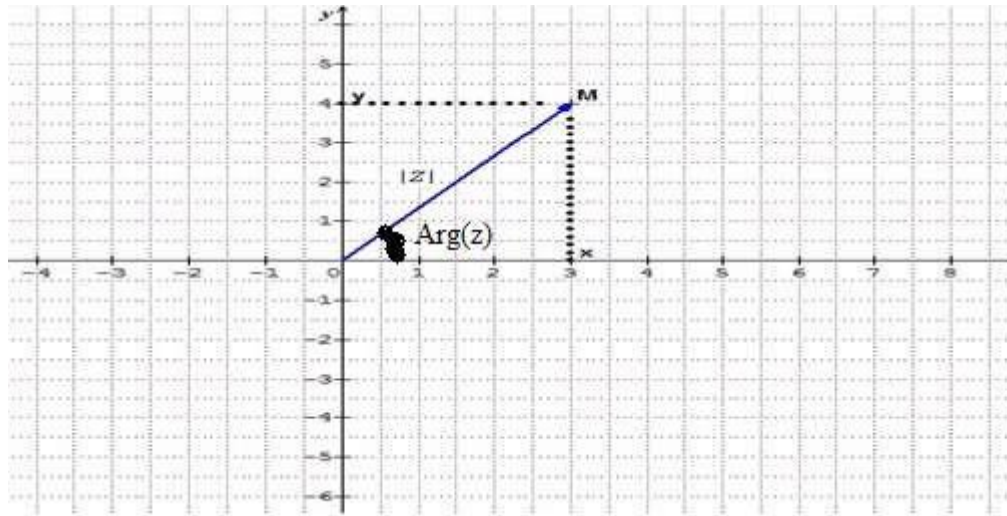
### Propriétés :

Pour tout  $z, z' \in \mathbb{C}$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  on a

- $|Z| = 0 \iff Z = 0$ .
- $|Z| = |Z| = |-Z| = |-Z|$
- $Z \times Z = |Z|^2$
- $|Z + Z'| \leq |Z| + |Z'|$
- $|Z \times Z'| = |Z| \times |Z'|$
- $\left| \frac{Z}{Z'} \right| = \frac{|Z|}{|Z'|}$  avec  $Z' \neq 0$
- $|Z^n| = |Z|^n$

## 2) l'argument

Soit  $Z \in \mathbb{C}^*$  et M son image dans un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  on appelle argument de Z et on note  $\arg(z)$ , toute mesure en radian de l'angle  $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$



Si  $\alpha$  est un argument de  $z$ , alors les autres mesures de l'argument de  $z$  sont à la forme

$$\alpha + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \text{ et on écrit } \arg Z = (\vec{u}; \overrightarrow{OM}) = \alpha [2\pi]$$

### Forme trigonométrique

Soit  $Z \in \mathbb{C}$  et  $\alpha$  un argument de  $Z$  on pose  $Z = x + iy / x, y \in \mathbb{R}$  et M l'image de  $Z$  dans un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$

$$\text{on a : } \cos \alpha = \frac{x}{|z|} = \frac{\operatorname{Re}(Z)}{|z|} \text{ et : } \sin \alpha = \frac{y}{|z|} = \frac{\operatorname{Im}(Z)}{|z|}$$

$$\text{Donc } \begin{cases} x = |z| \cos \alpha \\ y = |z| \sin \alpha \end{cases}$$

Forme algébrique de  $z$  est :  $z = x + iy \iff Z = |z| \cos \alpha + i |z| \sin \alpha \iff z = |z| (\cos \alpha + i \sin \alpha)$  cette dernière écriture est la forme trigonométrique de  $z$ .

### Cas particuliers

$$\text{Si } z \in \mathbb{R}_+ \text{ alors } \arg z = 0 + 2k\pi = 0 [2\pi] \quad \text{ex : } z = 5 \Rightarrow \arg z = 0 [2\pi]$$

$$\text{Si } z \in \mathbb{R}_- \text{ alors } \arg z = \pi + 2k\pi = \pi [2\pi] \quad \text{ex : } z = -3 \Rightarrow \arg z = \pi [2\pi]$$

$$\text{Si } z \in \mathbb{R}^* \text{ alors } \arg z = k\pi = 0 [\pi]$$

$$\text{Si } z \in i\mathbb{R}_+ \text{ alors } \arg z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi = \frac{\pi}{2} [2\pi] \quad \text{ex : } z = 5i \Rightarrow \arg z = \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

$$\text{Si } z \in i\mathbb{R}_- \text{ alors } \arg z = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi = \frac{3\pi}{2} [2\pi] \quad \text{ex : } z = -3i \Rightarrow \arg z = \frac{3\pi}{2} [2\pi]$$

$$\text{Si } z \in \mathbb{C}^* \text{ alors } \arg z = \frac{\pi}{2} + k\pi = \frac{\pi}{2} [\pi]$$

### Exemple :

$$\text{Soit } z = \sqrt{2} + i\sqrt{2} \\ |z| = \sqrt{2 + 2} = 2, \text{ Soit } \arg z = \theta [2\pi] \\ \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{On a : } \begin{cases} \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

la forme trigonométrique de  $z$  est :  $z = 2 \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$ .

**Angles remarquables :**

Angle	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$
cosinus	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

**Angles associés :** A chaque valeur  $\alpha \in ]0; \frac{\pi}{2}[$  correspondent trois autres valeurs :

$$\text{Si } \begin{cases} \cos\theta = \cos\alpha \\ \sin\theta = -\sin\alpha \end{cases} \text{ alors } \theta = -\alpha ; \text{ Si } \begin{cases} \cos\theta = -\cos\alpha \\ \sin\theta = \sin\alpha \end{cases} \text{ alors } \theta = \pi - \alpha ;$$

$$\text{Si } \begin{cases} \cos\theta = -\cos\alpha \\ \sin\theta = -\sin\alpha \end{cases} \text{ alors } \theta = \pi + \alpha ;$$

**Propriétés de l'argument :**

Pour tout  $z, z' \in \mathbb{C}$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  on a :

- $\text{Arg}(z \times z') = \text{arg}(z) + \text{arg}(z')$
- $\text{arg}\left(\frac{z}{z'}\right) = \text{arg}(z) - \text{arg}(z')$
- $\text{arg}(z)^n = n \times \text{arg}z$
- $\text{arg}\left(\frac{1}{z}\right) = -\text{arg}(z)$
- $\text{arg}(-z) = \pi + \text{arg}(z)$ .
- **0 n'a pas d'argument.**

**Exercice :** Mettre sous forme trigonométrique chacun des nombres suivants :

$$z_1 = 1 + i ; z_2 = -1 + i\sqrt{3} ; z_3 = \sqrt{3} + i ; z_4 = (-1 + i\sqrt{3})(\sqrt{3} + i) ; z_5 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{1+i} ;$$

$$z_6 = (\sqrt{3} + i)^6 ;$$

$$z_7 = -2 ; z_8 = 3i ;$$

$$z_9 = 4 ; z_{10} = -2i.$$

**Forme exponentielle**

**Convention :** Pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$  on a :  $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

Soit  $Z \in \mathbb{C}^*$  et  $\theta$  un argument de  $Z$  on a :  $Z = |Z|e^{i\theta}$  cette écriture est la forme exponentielle de  $Z$ .

**Exemple :** Ecrire  $Z = \sqrt{3} + i$  sous la forme exponentielle.

**Nature du triangle**

Soit A, B et C trois points du plan deux à deux distincts d'affixes respectives a, b et c On a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{c-a}{b-a} \right| = \frac{AC}{AB} \\ \text{arg}\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) \llbracket 2\pi \rrbracket \end{array} \right.$$

Remarque : Si le rapport

$\pm i$  alors le triangle ABC est isocèle rectangle en A

1) Si avec  $\alpha \neq 1$  alors le triangle ABC est rectangle en A

$$T = \frac{c-a}{b-a} = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left( \frac{1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i}{2} \right) \text{ alors le triangle ABC est équilatéral}$$

1

1)  $|T| = 1$  alors le triangle ABC est isocèle en A

Application :

Si le rapport $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = 2i$ alors le triangle ABC est	Rectangle en B
Si le rapport $\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$ alors le triangle ABC est	Équilatéral
Si le rapport $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = -i$ alors le triangle ABC est un	Rectangle isocèle en A
Si le rapport $\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}i$ alors le triangle ABC est	Isocèle en C
Si le rapport $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = i$ alors le triangle ABC est un	Rectangle isocèle en B
Si le rapport $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}i}{2}$ alors le triangle ABC est	Isocèle en A
Si le rapport $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = 1 + i$ alors le triangle ABC est	quelconque
Si le rapport $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = -3$ alors	Les points A, B et C sont alignés

9/14

### Quelques ensembles des points remarquable

Soit A et B deux points distincts.

- $AM = r$  est le cercle de centre A et de rayon r.
- $AM = BM$  est la médiatrice du segment [AB].
- $(\overleftrightarrow{MA}; \overleftrightarrow{MB}) = 0 \llbracket 2\pi \rrbracket$  est la droite (AB) privée du segment [AB].
- $(\overleftrightarrow{MA}; \overleftrightarrow{MB}) = \pi \llbracket 2\pi \rrbracket$  est le segment [AB] privé de A et B.
- $(\overleftrightarrow{MA}; \overleftrightarrow{MB}) = 0 \llbracket \pi \rrbracket$  est la droite (AB) privée de A et B.
- $(\overleftrightarrow{MA}; \overleftrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{2} \llbracket 2\pi \rrbracket$  est un demi-cercle d'extrémités A et B privé de A et B.
- $(\overleftrightarrow{MA}; \overleftrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{2} \llbracket \pi \rrbracket$  est le cercle de diamètre [AB] privé de A et B.

### Application

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ . Pour tout nombre

complexe z tel que  $z \neq 3+4i$  on pose :  $f(z) = \frac{z-4-3i}{z-3-4i}$

On considère les points A, B et C d'affixes respectives  $z_A = 3+4i$ ;  $z_B = 4+3i$  et  $z_C = 4+4i$

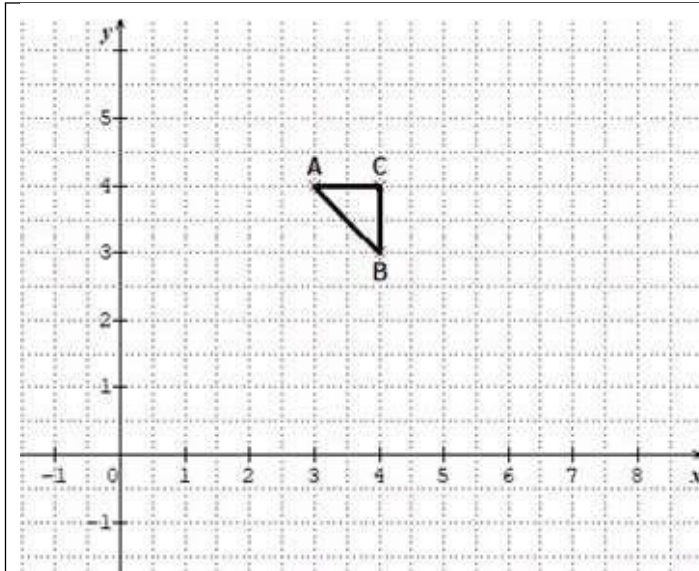
1) Placer les points A, B et C dans le repère.

2) Calculer et mettre sous forme algébrique le nombre complexe  $f(4+4i)$  et interpréter graphiquement.

c) Déterminer et représenter, dans le repère  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  les ensembles des points du plan d'affixe z dans chacun des cas suivants :

- $\Gamma_1$  tels que :  $|f(z)| = 1$
- $\Gamma_2$  tels que  $f(z)$  soit imaginaire pur.
- $\Gamma_3$  tels que  $f(z)$  soit un réel.
- $\Gamma_4$  tels que  $|f(z) - 1| = 2$

Réponse :



2)

$$f(4 + 4i) = \frac{4 + 4i - 4 - 3i}{4 + 4i - 3 - 4i} = \frac{i}{1} = i$$

Comme  $f(4 + 4i) = \frac{z_C - z_B}{z_C - z_A}$  Donc le triangle ABC est rectangle isocèle en C.

Car  $|\frac{z_C - z_B}{z_C - z_A}| = \frac{BC}{AC} = 1 \iff BC =$

$$\arg\left(\frac{z_C - z_B}{z_C - z_A}\right) = (\vec{CA}; \vec{CB}) = \arg(i) = \frac{\pi}{2}$$

3) ■ L'ensemble des points M d'affixe z tels que  $\Gamma_1$  tels que  $|f(z)| = 1 \iff \left|\frac{z-4-3i}{z-3-4i}\right| = 1$   
 $\iff \frac{|z_M - z_B|}{|z_M - z_A|} = 1 \iff \frac{|z_M - z_B|}{|z_M - z_A|} = 1 \iff MB = MA \iff M \in med[AB]$ .  
 Donc l'ensemble des points  $\Gamma_1$  est la médiatrice du segment  $[AB]$ .

■ L'ensemble des points M d'affixe z tels que  $\Gamma_2$  tels que  $f(z)$  tels que soit imaginaire pur

$$f(z) \in i\mathbb{R} \iff \begin{cases} f(z) = 0 \\ \text{ou} \\ \arg(f(z)) = \frac{\pi}{2} \llbracket \pi \rrbracket \end{cases} \iff \begin{cases} z_M = z_B \\ \text{ou} \\ \arg\left(\frac{z_M - z_B}{z_M - z_A}\right) = \frac{\pi}{2} \llbracket \pi \rrbracket \end{cases}$$

$M = B$   
 $\text{ou } (\vec{MA}; \vec{MB}) = \frac{\pi}{2} \llbracket \pi \rrbracket$  Donc l'ensemble  $\Gamma_2$  est le cercle de diamètre  $[AB]$  privé de A.

■ L'ensemble des points M d'affixe z tels que  $\Gamma_3$  tels que  $f(z)$  tels que soit réel

$$f(z) \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} f(z) = 0 \\ \text{ou} \\ \arg(f(z)) = 0 \llbracket \pi \rrbracket \end{cases} \iff \begin{cases} z_M = z_B \\ \text{ou} \\ \arg\left(\frac{z_M - z_B}{z_M - z_A}\right) = 0 \llbracket \pi \rrbracket \end{cases}$$

$M = B$   
 $\text{ou } (\vec{MA}; \vec{MB}) = 0 \llbracket \pi \rrbracket$  Donc l'ensemble des points  $\Gamma_2$  est la droite  $(AB)$  privé de A.

■ L'ensemble des points M d'affixe z tels que  $\Gamma_1$  tels que

$$|f(z) - 1| = \sqrt{2} \iff \left| \frac{z-4-3i}{z-3-4i} - 1 \right| = \sqrt{2}$$

$$\iff \left| \frac{z-4-3i-z+3+4i}{z-3-4i} \right| = \sqrt{2} \iff \left| \frac{-1+i}{z-3-4i} \right| = \sqrt{2} \iff \frac{\sqrt{2}}{|z-3-4i|} = \sqrt{2} \iff \frac{\sqrt{2}}{|z-3-4i|} = \frac{\sqrt{2}}{|z_M - z_A|} = \frac{\sqrt{2}}{AM} = \sqrt{2} \iff AM = 1$$

Donc l'ensemble des points  $\Gamma_4$  est le cercle de centre A et de rayon 1.

## Equations dans C

### 1) Equation du 1<sup>er</sup> degré

Si  $aZ + b = c$  ( $a \in C^*$ ;  $b$  et  $c \in C$ ) alors  $Z = \frac{c-b}{a}$

**Exemple :** Résoudre  $(1 + 2i)Z - 2 + 3i = 5 - 2i$

On a donc:

$$Z = \frac{5-2i+2-3i}{1+2i} = Z = \frac{(7-5i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{7-14i-5i+10}{1^2+2^2} = Z = \frac{-3-19i}{5}$$

### 2) Equation du second degré

#### i) Racines carrées d'un complexe

Soit Z un nombre complexe donné, on cherche les complexes z tels que  $z^2 = Z$

##### a) Cas particuliers

Soit a un réel strictement positif

Si  $Z = a$  alors les racines carrées de Z sont  $z = \sqrt{a}$  et  $z = -\sqrt{a}$ .

**Exemple :**  $Z = 3$  les racines carrées de Z sont  $z = \sqrt{3}$  et  $z = -\sqrt{3}$ .

Si  $Z = -a$  alors les racines carrées de Z sont  $z = i\sqrt{a}$  et  $z = -i\sqrt{a}$ .

**Exemple :**  $Z = -3$  les racines carrées de Z sont  $z = i\sqrt{3}$  et  $z = -i\sqrt{3}$ .

En remarquant que  $(1+i)^2 = 2i$  et que  $(1-i)^2 = -2i$  on trouve donc :

Si  $Z = ai$  alors les racines carrées de Z sont  $z = \frac{\sqrt{a}}{2}(1+i)$  et  $z = -\frac{\sqrt{a}}{2}(1+i)$ .

**Exemple :**  $Z = 6i = 3 \times 2i$  les racines carrées de Z sont  $z = \sqrt{3}(1+i)$  et  $z = -\sqrt{3}(1+i)$ .

Si  $Z = -ai$  alors les racines carrées de Z sont  $z = \frac{\sqrt{a}}{2}(1-i)$  et  $z = -\frac{\sqrt{a}}{2}(1-i)$ .

**Exemple :**  $Z = -10i = 5 \times (-2i)$  les racines carrées de Z sont  $z = \sqrt{5}(1-i)$  et  $z = -\sqrt{5}(1-i)$ .

##### b) Cas général

Posons  $Z = a + bi$  où a et b sont des réels et  $z = x + iy$ .

$$\text{On a } z^2 = Z \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$$

$$\text{On remarque que } |z|^2 = |Z| \iff x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\text{d'où le système qui permet de déterminer x et y : } \begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$$

Les racines carrées sont toujours deux complexes opposés.

**Exemples :** Déterminer les racines carrées de :

$$Z_1 = 3 + 4i ; Z_2 = -7 + 24i ;$$

$$Z_3 = -4 ; Z_4 = -6i ; Z_5 = 8i.$$

**Réponse :**

■ Les racines carrées de  $Z_1 = 3 + 4i$

$$x^2 + y^2 = |Z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \quad (1)$$

$$\text{Soit } \delta = x + iy \text{ tel que } \delta^2 = Z \text{ On a donc: } \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 & (2) \\ 2xy = 4 & (3) \end{cases}$$

$$(1) + (2) \Rightarrow 2x^2 = 8 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

Si  $x = 2$  alors  $2 \times 2 \times y = 4 \Rightarrow y = \frac{4}{4} = 1$ . Donc Les racines carrées de  $Z_1 = 3 + 4i$  sont

$$\delta_1 = 2 + i \text{ et } \delta_2 = -\delta_1 = -2 - i$$

■ Les racines carrées de  $Z_2 = -7 + 24i$

$$x^2 + y^2 = |Z| = \sqrt{(-7)^2 + 24^2} = 25 \quad (1)$$

$$\text{Soit } \delta = x + iy \text{ tel que } \delta^2 = Z \text{ On a donc: } \begin{cases} x^2 - y^2 = -7 & (2) \\ 2xy = 24 & (3) \end{cases}$$

$$(1) + (2) \Rightarrow 2x^2 = 18 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$$

Si  $x = 3$  alors  $2 \times 3 \times y = 24 \Rightarrow y = \frac{24}{6} = 4$ . Donc Les racines carrées de  $Z_2 = -7 + 24i$  sont

$$\delta_1 = 3 + 4i \text{ et } \delta_2 = -\delta_1 = -3 - 4i$$

■ Les racines carrées de  $Z_3 = -4$

$Z_3 = -4 = 4i^2$ . Donc Les racines carrées de  $Z_1 = -4$  sont  $\delta_1 = 2i$  et  $\delta_2 = -\delta_1 = -2i$

■ Les racines carrées de  $Z_4 = -6i$

$$Z_4 = 3 \times (-2i) = 3(1 - i)^2.$$

Donc Les racines carrées de  $Z_1 = -6i$  sont  $\delta_1 = \sqrt{3}(1 - i)$  et  $\delta_2 = -\sqrt{3}(1 - i)$

■ Les racines carrées de  $Z_4 = 8i$

$$Z_4 = 4 \times (2i) = 4(1 + i)^2.$$

Donc Les racines carrées de  $Z_1 = 8i$  sont  $\delta_1 = 2(1 + i)$  et  $\delta_2 = -2(1 + i)$

## II) Equation du second degré

la forme générale est  $az^2 + bz + c = 0$  où  $z$  est l'inconnue et  $a, b$  et  $c$  sont des coefficients complexes avec  $a \neq 0$ .

Pour résoudre cette équation on calcule le discriminant  $\Delta = b^2 - 4ac$  et on cherche une racine carrée  $\gamma$  de  $\Delta$ . Les solutions sont données par les formules :

$$z_1 = \frac{-b + \gamma}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b - \gamma}{2a}$$

### Exercice :

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les équations suivantes :

$$(E_1): z^2 - 4z + 5 = 0$$

$$(E_2): z^2 - (7 + i)z + 22 - 7i = 0$$

Réponse :

$(E_1): z^2 - 4z + 5=0$

$\Delta = 16 - 4 \times 1 \times 5 = 16 - 20 = -4 = 4i^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2i$

Donc les solutions de  $(E_1)$  sont :  $z_1 = \frac{4+2i}{2} = 2 + i$  et  $z_2 = \frac{4-2i}{2} = 2 - i$

$S = \{2 + i ; 2 - i\}$

$(E_2): z^2 - (7 + i)z + 22 - 7i=0$

$\Delta = (7 + i)^2 - 4 \times 1 \times (22 - 7i) = 49 + 14i - 1 - 88 + 28i = -40 + 42i$

$x^2 + y^2 = |\Delta| = \sqrt{(-40)^2 + 42^2} = 58 \quad (1)$

Soit  $\delta = x + iy$  tel que  $\delta^2 = \Delta$  On a donc:  $x^2 - y^2 = -40 \quad (2)$

$2xy = 42 \quad (3)$

$(1) + (2) \Rightarrow 2x^2 = 18 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$

Si  $x = 3$  alors  $2 \times 3 \times y = 42 \Rightarrow y = \frac{42}{6} = 7$ . Donc  $\delta = 3 + 7i$

Donc les solutions de  $(E_2)$  sont :  $z_1 = \frac{7+i+3+7i}{2} = 5 + 4i$  et  $z_2 = \frac{7+i-3-7i}{2} = 2 - 3i$

$S = \{5 + 4i ; 2 - 3i\}$

**3) Equation du troisième degré**

En général la résolution des équations du troisième degré passe par trois étapes :

- Détermination d'une solution particulière (elle est souvent donnée ou indiquée)
- Factorisation
- Résolution

**Exemple :** On considère le polynôme :  $P(z) = z^3 - 4z^2 + z + 2$

a) Calculer  $p(1)$

b) Déterminer les nombres  $\alpha$  et  $\beta$  tels que  $P(z) = (z - 1)(z^2 + \alpha z + \beta)$

c) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $P(z) = 0$ .

**Solution :** a)  $P(1) = 1 - 4 + 1 + 2 = 4 - 4 = 0$

b) En utilisant le tableau d'Horner

	1	-4	1	2
1	↓	1	-3	-2
	1	-3	-2	0

$\Rightarrow \alpha = -3$  et  $\beta = -2 \Rightarrow P(z) = (z - 1)(z^2 - 3z - 2)$

c)  $P(z) = 0 \iff (z - 1)(z^2 - 3z - 2) = 0 \iff \begin{cases} z - 1 = 0 \Rightarrow z_0 = 1 \\ z^2 - 3z - 2 = 0 \end{cases}$

$\Delta = 9 - 4 \times 1 \times (-2) = 9 + 8 = 17 \Rightarrow z_1 = \frac{3-\sqrt{17}}{2}$  et  $z_2 = \frac{3+\sqrt{17}}{2}$

$S = \{1 ; \frac{3-\sqrt{17}}{2} ; \frac{3+\sqrt{17}}{2}\}$

**Remarque :**

En supposant la solution particulière n'est pas donnée mais c'est indiqué comme ci-dessous :

Résoudre l'équation (E) :  $z^3 - (4 + 3i)z^2 + (3 + 13i)z + 10 - 10i = 0$

Sachant qu'elle admet une solution imaginaire pure.

Soit  $z_0 = ai$  cette solution imaginaire pure.

On a donc :  $(ai)^3 - (4 + 3i)(ai)^2 + (3 + 13i)(ai) + 10 - 10i = 0$

$$-a^3i + 4a^2 + 3a^2i + 3ai - 13a + 10 - 10i = 0 \Leftrightarrow (4a^2 - 13a + 10) + (-a^3 + 3a^2 + 3a - 10)i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4a^2 - 13a + 10 = 0 \text{ (1)} \\ \text{et } -a^3 + 3a^2 + 3a - 10 = 0 \text{ (2)} \end{cases}$$

Les solutions de l'équation (1) sont 2 et  $\frac{5}{4}$  mais la solution qui vérifie l'équation (2) c'est  $\alpha = 2$   
 Donc la solution particulière c'est  $z_0 = 2i$  et pour tout  $z \in C$

on a :  $(E) \Leftrightarrow (z - 2i)(z^2 + az + b) = 0$

En utilisant le tableau d'Horner

	1	-4 - 3i	3 + 13i	10 - 10i
2i	↓	2i	-8i + 2	10i - 10
	1	-4 - i	5 + 5i	0

$\Rightarrow a = -4 - i$  et  $b = 5 + 5i \Rightarrow P(z) = (z - 2i)(z^2 - (4 + i)z + 5 + 5i)$

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow (z - 2i)(z^2 - (4 + i)z + 5 + 5i) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z - 2i = 0 \Rightarrow z_0 = 2i \\ z^2 - (4 + i)z + 5 + 5i = 0 \end{cases}$$

Pour  $z^2 - (4 + i)z + 5 + 5i = 0$

$\Delta = (4 + i)^2 - 4 \times 1 \times (5 + 5i) = 16 + 8i - 1 - 20 - 20i = -5 - 12i = (2 - 3i)^2$

Donc  $z_1 = \frac{4+i+2-3i}{2} = \frac{6-2i}{2} = 3 - i$  et  $z_2 = \frac{4+i-2+3i}{2} = \frac{2+4i}{2} = 1 + 2i$

$S = \{2i ; 3 - i ; 1 + 2i\}$