Application RIMCLASS

Exercice1 :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{3x^2+4x+3}{x^2+1}$

Et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unité 2cm.

1. Déterminer les réels a et b tel que : $f(x) = a + \frac{bx}{x^2+1}$
2. Etudier les variations de f.
3. Déterminer l'équation de la tangente (T) a la courbe (C) au point I d'abscisse0.
   Etudier la position relative de (C) par rapport a (T).
4. Démontrer que I est un centre de symétrie de (C).
5. Construire la courbe (C) et la tangente (T) dans le repère propose.

Exercice 2 :

On donne ci-dessous le T.V d'une fonction f dérivable sur D_f.

x	-∞		0		2		+∞
		+	0	-	‖	+	
f(x)	½	↗	2	↘	-∞ ‖ +∞	↗	1

1. Déterminer D_f.
2. Déterminer les asymptotes de C_f
3. Déterminer le nombre de solutions des équations suivantes :
   $f(x) = 0\,; f(x) = \frac{3}{2}$
4. Il y a une tangente horizontale de C_f ?
5. En déduire le signe de f.

Exercice 3 :

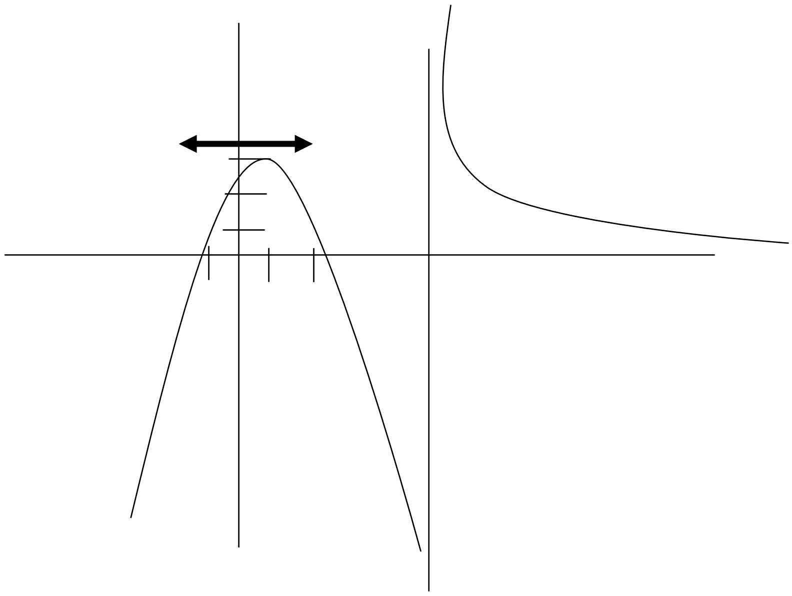
Soit $g(x) = x^3 + 12x - 2$

1. Etudier les variations de g.
2. a) Montrer qu'il existe un seul réel α tel que :
   $g(\alpha) = 0$ et que $0 < \alpha < 1$
   b) Etudier le signe de g(x).
3. Soit $f(x) = \frac{x^3+1}{x^2+4}$
   a) Montrer que f est dérivable sur R et que :
   $\forall x \in IR, f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2+4)^2}$
   b) Montrer que $f(\alpha) = \frac{3-12\alpha}{\alpha^2+4}$
4. Etudier les variations de f.

Application RIMCLASS

Exercice 4 :

Soit f la fonction de courbe suivant :



1. Déterminer le domaine de définition.
2. Déterminer les limites aux bornes de D_f.
3. Préciser les asymptotes et les branches infinies.
4. Résoudre l'équation f(x) = 0
5. Donner le signe de f(x).
6. Dresser le tableau de variations de f.
7. Discuter suivant les valeurs de m le nombre de solution de l'équation f(x) = m.

Exercice 5 :

A) Soit g la fonction définie par :
   $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$
   1. Etudier les variations de g.
   2. Montrer que l'équation g(x) = 0 admet une unique solution α et tel que : $1 < \alpha < 2$. Donne un encadrement de à 0,1 près.
   3. En déduire le signe de g(x) suivant les valeurs de x.

B) On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{x - 1}{x^3 + 1}$$

1. Montrer que : $f'(x) = \frac{-g(x)}{(x^3+1)^2}$
2. Etudier les variations de f.
3. Ecrire une équation de la tangente (T) a la courbe C_f de f au point d'abscisse 1.
4. Etudier la position relative de C_f par rapport à (T).
5. Tracer C_f et (T) dans un repère orthonormé.
6. Discuter suivant les valeurs de m le nombre de solutions de l'équation :
   $mx^3 - x + m + 1 = 0$

Exercice 6 :

On considère la fonction définie par : $f(x) = \frac{2x^2-2x+1}{x^2-x}$

1. Déterminer D_f puis les réels a, b et c tel que : $f(x) = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2-x}$
2. a) Donne le tableau de variation de f. (utiliser la dernière écriture de f).
   b) En déduire que : $\forall x \in]0\,;1[\, : f(x) < 0$
3. Soit C la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ d'unité 2cm.
   a) Montrer que C admet trois asymptotes dont on déterminera les équations.
   b) Démontrer que l'axe Δ d'équation x = ½ est une axe de symétrie de C.
   c) Représenter Δ, les asymptotes et la courbe f dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
   d) Discuter graphiquement suivant les valeurs du paramètre m le nombre de solutions de l'équation f(x) = m.
4. Soit (U_n) la suite définie par : $\forall n \in N^*\ U_n = f(n+1)$
   a) Calculer $U_1\ et\ U_2$
   b) Démontrer que (U_n) est décroissant et minorée (On peut utiliser le T.V de f).
5. Soit $S_n = U_1 + U_2 + \cdots + U_n$
   a) Calculer S_n en fonction de n (utiliser la deuxième écriture de f).
   b) Démontrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n^2}$

Exercice 7 :

On considère f la fonction définie sur $]-1\,;\,+\infty[\ par: f(x) = \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x}}$

1. a) Calculer $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)\ \ et\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
   b) Etudier les branches infinités de la courbe Cf.
2. a) Montrer que $\forall x \in]-1\,;\,+\infty[\,; f'(x) = \frac{\sqrt{2}(x+2)}{2(1+x)\sqrt{1+x}}$
   b) Donner le tableau de variations de la fonction f.
   c) Déterminer $f([0;1])$
3. Montrer que $f(x) - x = \frac{x(1+x)}{(\sqrt{1+x})\sqrt{1+x}}$
   En déduire les positions relatives de C_f et la droit (D) ; y = x
4. Déterminer l'équation (Δ) de la tangente à la courbe (C_f) au point d'abscisse 0.
5. Calculer f''(x) pour tout $x\ de\ ]1\,;\,+\infty[$. En déduire la concavité de (C_f) sur $]1\,;\,+\infty[$
6. Tracer la courbe (C_f).
7. a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
   b) Tracer $(C_{f^{-1}})$ la courbe de f^{-1} dans le même repère.
8. Soit $(U_n)n \in N$ la suite définie par : $\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ \quad ; (\forall n \in N \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$
   a) Montrer que $(\forall n \in N)\,; 0 < U_n < 1$
   Montrer que $(\forall \in N)\,; \frac{U_{n+1}}{U_n} > 1$
   b) En déduire que (U_n) est convergente et déduire sa limite.